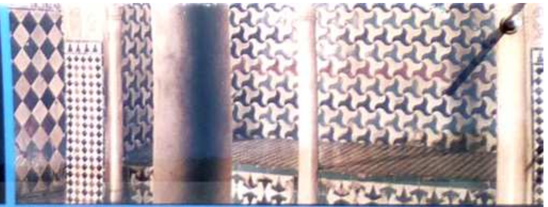
Les mathématiques dans la vie quotidienne

ArmorScience

Comment paver ?

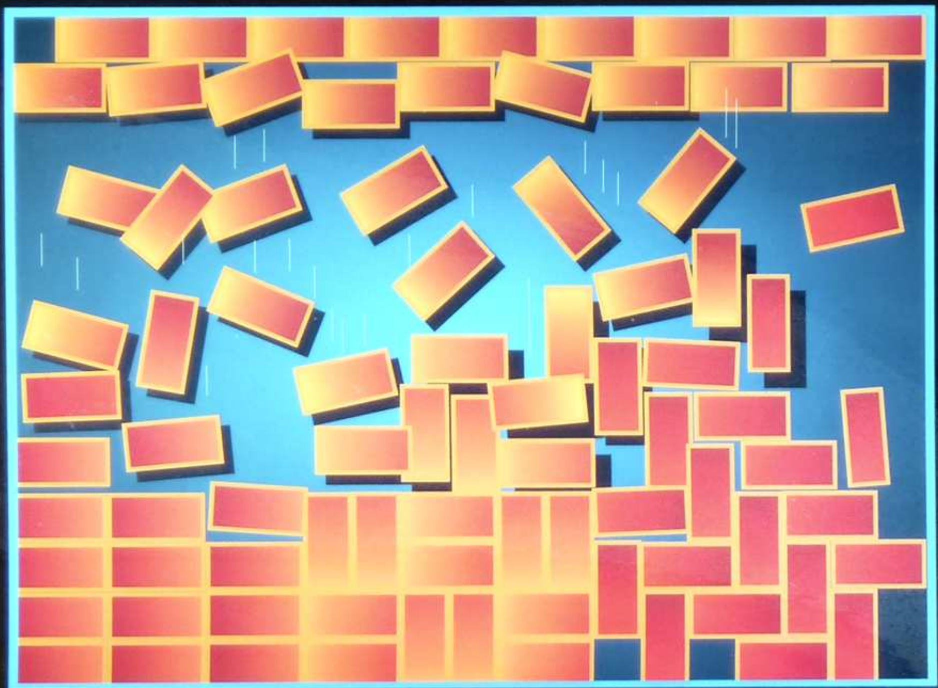


L'utilisation de pavages périodiques à des fins décoratives est une tradition aussi ancienne que la géométrie elle-même.

Le même pavé rectangulaire permet de couvrir le plan de plusieurs façons, sans recouvrement ni lacune.

Les pavages ci-dessous sont périodiques et présentent des symétries différentes.

On peut aussi changer la forme du pavé pour obtenir d'autres types de symétries. Combien ?

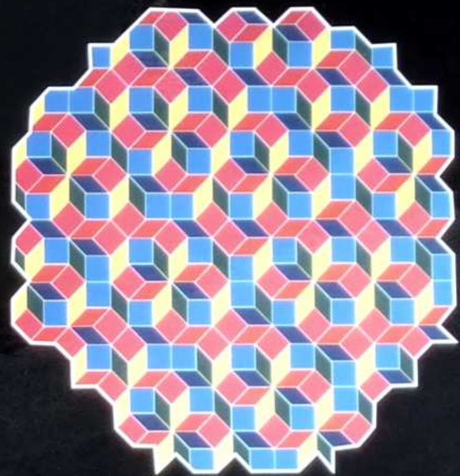


17 groupes de pavages du plan

L'étude des symétries des pavages périodiques repose sur la *théorie des groupes*, créée par le mathématicien français Evariste Galois (1811-1832). Aujourd'hui, ses applications ne se comptent plus : algèbre, géométrie, cristallographie, théorie du codage, physique des particules, etc.

Elle a permis de montrer qu'il n'existe que **17** groupes de pavages plans distincts. Chacun d'eux figure déjà parmi les décors de l'Alhambra de Grenade, construit il y a 1000 ans.

Le problème analogue dans l'espace, motivé par l'étude des cristaux, montre qu'il existe 230 groupes.



Alors on sait tout ?

Non, car il existe aussi des quasi cristaux, des pavages non périodiques qui sont encore l'objet de recherches.

Réalisé par Centre•Sciences, CCSTI de la région Centre
Graphisme Samuel Roux - Orléans
Avec le soutien de la Commission Européenne, des Ministères Français de la Recherche et des Affaires Étrangères

sur une idée de Jean Brette, Palais de la découverte - Paris
Illustrations : Samuel Roux - L'Alhambra de Grenade - Pavage de Sir Roger Penrose

Ecouter un CD rayé !?!

Sur un disque compact, comme sur un ordinateur, chaque son est codé par une suite de 0 et de 1, regroupés par paquets (les octets).

Pour garantir la fidélité de l'enregistrement, on ajoute d'autres octets qui permettent de repérer et corriger les petites erreurs dues aux poussières ou aux rayures.

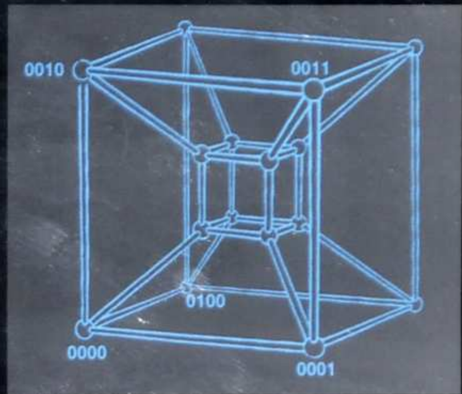
La théorie mathématique des codes correcteurs d'erreurs étudie comment augmenter la fiabilité tout en diminuant le coût du codage. Elle a aujourd'hui de nombreuses applications : fabrication des disques compacts, transmission des informations par Internet ou par satellites...

10010011011100101010110111

10111101110101010110101100111

1010110011100000 11

Chaque sommet de cet hypercube est codé par 4 chiffres.
Quel est le code de celui qui est le plus "éloigné" de 0000 ?



Distance entre deux mots

Plus l'écriture des "mots" est différente, plus le risque de confusion diminue. Pour minimiser le nombre d'octets ajoutés, on utilise un paramètre important des codes correcteurs, la "distance" – dite de Hammings - entre deux mots.
C'est le nombre de symboles qui sont différents : entre 10100111 et 10111111 la distance vaut 2, entre 10100111 et 10000001, elle vaut 3.
Il est facile d'améliorer la correction en augmentant la longueur des mots. Les algorithmes de codage permettent des compromis : repérer au mieux les erreurs en augmentant le moins possible la longueur des mots.

Réalisé par Centre•Sciences, CCSTI de la région Centre
Graphisme Samuel Roux - Orléans
Avec le soutien de la Commission Européenne,
des Ministères Français de la Recherche et des Affaires Étrangères

Sur une idée de Catherine Goldstein, Université de Paris-Sud
Illustrations : V. Burille - Toucan sud, Hubble deep field south - le F...

MATHÉMATIQUES dans la vie quotidienne

Des codes secrets rendus publics ?

Grâce aux codes à clé publique, vous pourrez bientôt faire sans risque des achats sur Internet et transmettre vos références de carte bancaire.

La méthode : le codage est rendu public, mais le message ne peut être déchiffré que par le destinataire autorisé, car la procédure de décodage reste secrète ! C'est vrai par exemple pour la méthode RSA conçue en 1978 par Rivest, Shamir et Adleman.

L'astuce ?

Si un nombre est le produit de deux autres, il peut être très difficile de retrouver les deux nombres le composant, surtout si les nombres sont très grands.

Le codage, qui est public, utilise seulement le nombre produit ; les deux nombres le composant, eux, restent secrets. Ils sont nécessaires pour décoder.

C'est pour cette raison que la recherche mathématique s'intéresse aux très grands nombres premiers, de plusieurs centaines de chiffres.

RSA155

10941738641570527421809707322040357612003
732945449205990913842131476349984288934784
7179972578912673324976257528997818337970
76537244027146743531593354333897

=

1026395928297411057720541965739916759007
16567808038066803341933521790711307779

×

106603488380168454820927220360012878679207
958575989291522270608237193062808643

Des grands nombres premiers

D'un autre côté, certains mathématiciens cherchent - et parfois trouvent - des algorithmes de factorisation suffisamment rapides pour constituer une menace sur la sécurité de RSA ; cela oblige à augmenter, avec les années, l'ordre de grandeur des nombres premiers utilisés.

Les recherches mathématiques très "pures", portant sur les nombres premiers et la factorisation des grands nombres, sont devenues d'une importance cruciale pour la cryptographie.

Et les nombres premiers ne sont pas les seuls objets mathématiques intéressants pour la cryptographie.

Des spécialistes élaborent aussi des méthodes de cryptage fondées sur les propriétés arithmétiques des "courbes elliptiques", d'autres recherchent des procédures mettant en œuvre les lois étranges de la physique quantique, etc.

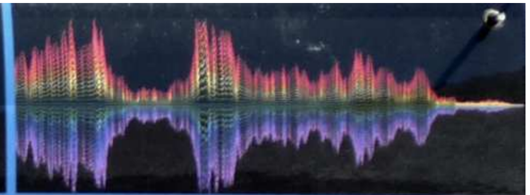
MATHÉMATIQUES
dans la vie quotidienne

Réalisé par Centre•Sciences, CCSTI de la région Centre
Graphisme Samuel Roux - Orléans
Avec le soutien de la Commission Européenne,
des Ministères Français de la Recherche et des Affaires Étrangères

sur une idée de Catherine Goldstein, Université de Paris-Sud
et Jean-Pierre Massias, Université de Limoges.

Illustrations : Centre•Sciences - Samuel Roux

La bourse sans risque ?

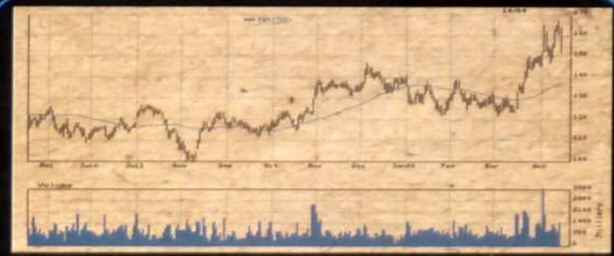


Comment faire une opération boursière sans risque ? Il suffit de prendre une assurance pour un prix et à une date fixés à l'avance. L'exemple le plus ancien est celui des marchands génois : lorsqu'ils affrétaient un bateau, ils achetaient une option sur un second navire. Si le premier arrivait à bon port, l'option n'était pas exercée et sa valeur était perdue, s'il coulait, l'assurance permettait d'acheter la cargaison du second à un prix fixé à l'avance.

Une formule, trouvée par Black et Scholes (prix Nobel d'économie en 1997), permet aujourd'hui de fixer à l'avance le prix de l'option.

L'essor considérable des marchés financiers conduit aujourd'hui à une offre croissante de produits, dits produits dérivés, qui couvrent des risques de plus en plus complexes.

$$C = S \times N(d_1) - K \times e^{-rT} N(d_2)^{*}$$



Gardez vos dollars ?

- Je reviens d'un voyage avec des $$$!
- Si je les change en FFF, mon risque est nul, mais pourquoi ne pas les garder en espérant que le $$$ va monter ?
- Allez, je les garde ! Mais si ça baissait ? ! ?

Je suis perplexe !!!
Est-ce que je peux avoir le beurre et… ???
Réponse : oui, c'est possible… mais ce n'est pas gratuit !!!
La banque peut vous garantir de vendre vos $$$ au meilleur du cours d'aujourd'hui et du cours dans 6 mois.
Vous êtes sûr de vous en sortir sans grandes pertes !!!
Mais… ce n'est pas gratuit, ça se saurait.
Il faut que la banque y trouve aussi son intérêt.
Combien cela vous coûtera-t-il ?
La réponse est dans la formule de Black & Scholes !
Conclusion : faire des maths, ça peut aussi garantir.

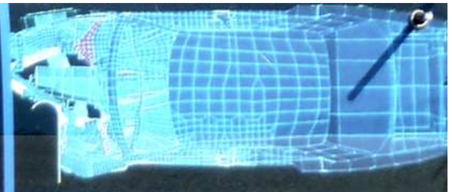
** Pour ceux qui veulent décrypter la formule :*
S est le cours aujourd'hui, K le cours envisagé pour vendre, T la durée fixée et r le taux bancaire.

MATHÉMATIQUES
dans la vie quotidienne

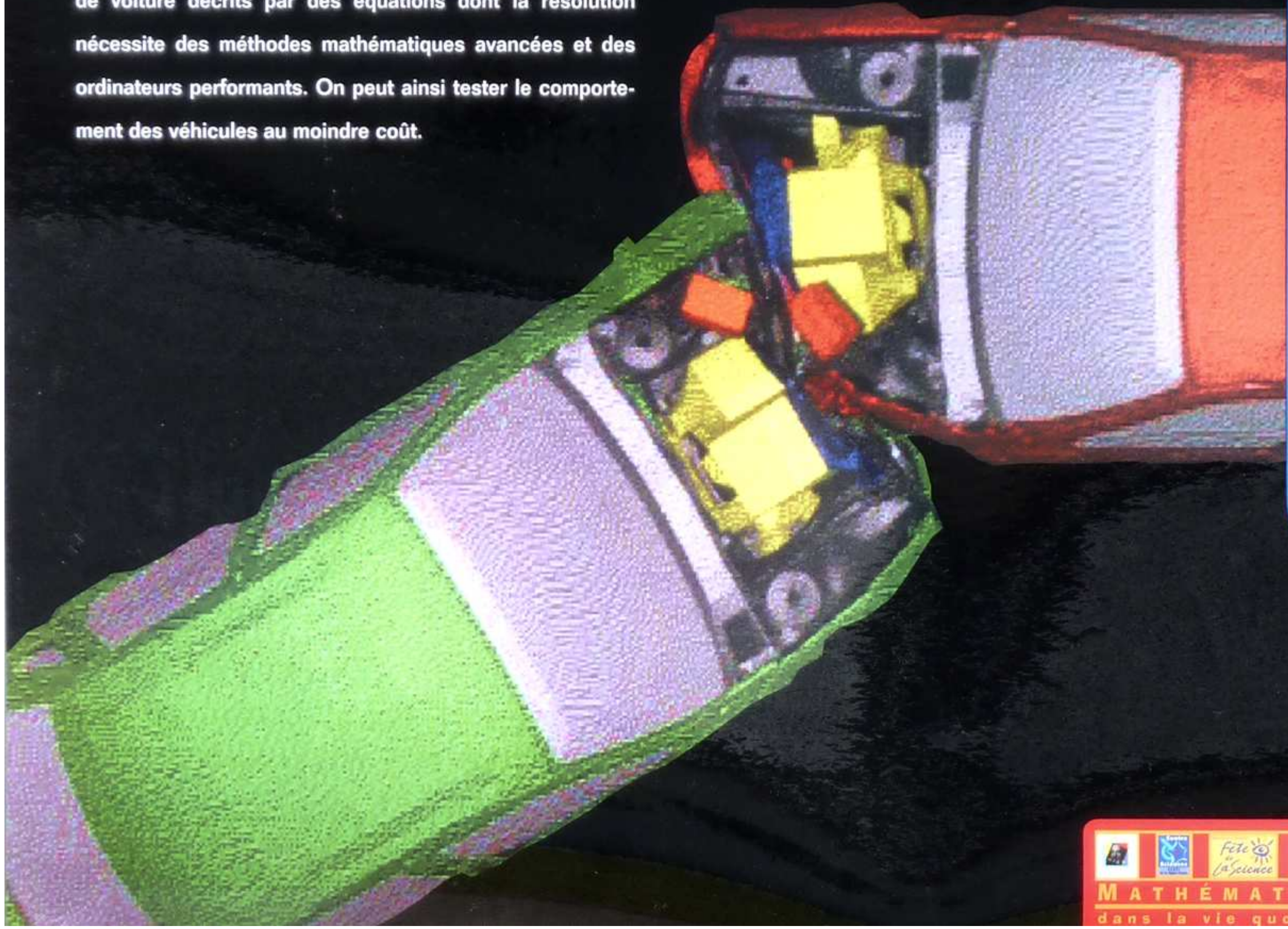
Réalisé par Centre•Sciences, CCSTI de la région Centre
Graphisme Samuel Roux - Orléans
Avec le soutien de la Commission Européenne, des Ministères Français de la Recherche et des Affaires Étrangères

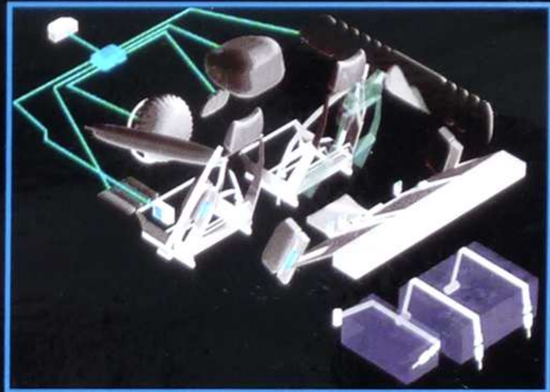
Sur une idée d'Emmanuel Lesigne (Université de Tours) et Bernard Lapeyre (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées - Paris)
Illustrations : Samuel Roux - Bernard Ycart - Bourso

Zéro dommage !



Dans l'industrie automobile les simulations sur ordinateur remplacent de plus en plus souvent les expériences réelles. Pour cela les ingénieurs développent des modèles virtuels de voiture décrits par des équations dont la résolution nécessite des méthodes mathématiques avancées et des ordinateurs performants. On peut ainsi tester le comportement des véhicules au moindre coût.





Simulations : du réel au virtuel

Le prototype virtuel d'une voiture demande la conception d'un modèle mathématique global intégrant les caractéristiques du véhicule, mais aussi ses interactions avec la route, avec l'air, la description d'éventuels obstacles, discrétisation, est résolu sur ordinateur avec des méthodes numériques.
La complexité de ces modèles conduit à des calculs très volumineux qui nécessitent des ordinateurs fortement parallèles.

MATHÉMATIQUES
dans la vie quotidienne

Réalisé par Centre•Sciences, CCSTI de la région Centre
Graphisme Samuel Roux - Orléans
Avec le soutien de la Commission Européenne,
des Ministères Français de la Recherche et des Affaires Étrangères

Sur une idée d'Andreas Frommer – Université de Wuppertal. RFA
Illustrations : National Crash Analysis Center of The George Washington University, USA
Mercédès-Benz et Autoliv Inc.

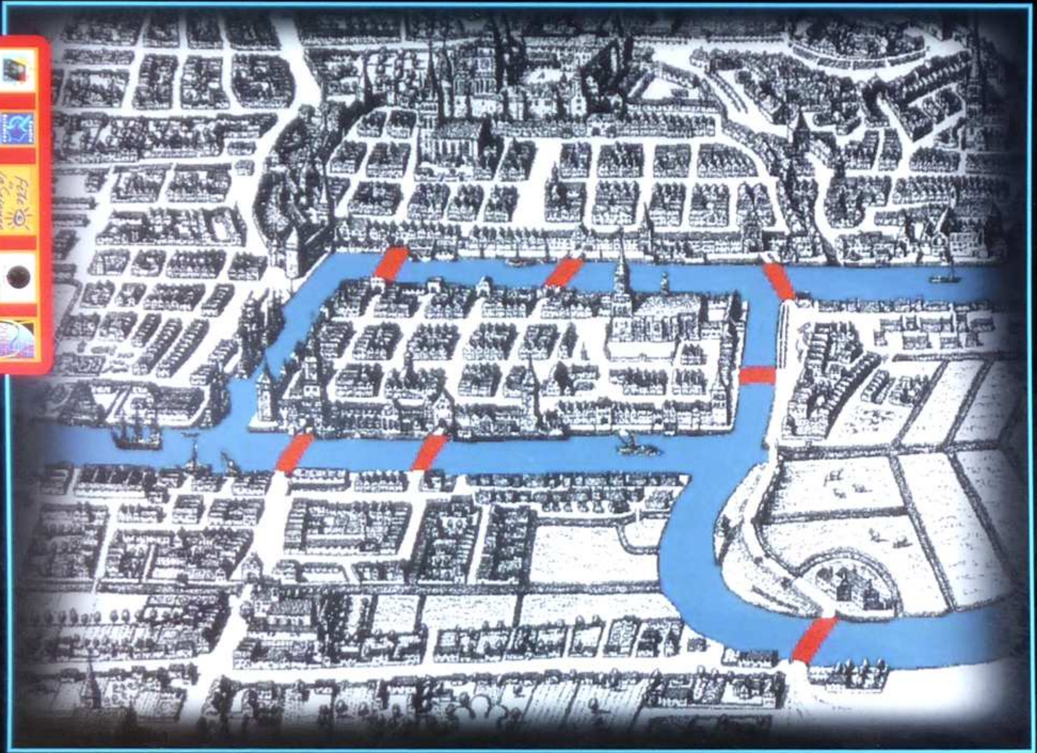
D'un seul trait ?

Les 7 ponts de Königsberg

Peut-on parcourir la ville de Königsberg en passant sur chaque pont une fois et une seule ?

Étudié par Leonard Euler au 18ème siècle, ce problème est à l'origine de la *théorie des graphes* qui, aujourd'hui, intervient dans de nombreux domaines : gestion des réseaux de distribution, trafic routier, ordonnancement, affectation des ressources, transmetteurs de téléphones mobiles, conception des circuits électroniques...

MATHÉMATIQUES
dans la vie quotidienne



Pouvez-vous retracer chacun de ces dessins sans lever le crayon et en passant une fois et une seule sur chaque trait ?

La réponse d'Euler :
comptez le nombre de points où aboutit un nombre impair de traits. Si ce nombre est égal à zéro ou à deux, il y a des solutions. Dans tous les autres cas il n'y a pas de solution.

Réalisé par Centre•Sciences, CCSTI de la région Centre
Graphisme Samuel Roux - Orléans
Avec le soutien de la Commission Européenne, des Ministères Français de la Recherche et des Affaires Étrangères

Sur une idée de Jean Brette, Palais de la découverte - [redacted]

De l'eau dans l'huile ! ? !

Comment mélanger deux substances qui ont tendance à se repousser ? Cela dépend de la température et des seuils de saturation qui correspondent à l'équilibre entre l'énergie et l'entropie des produits.

Mettez un peu d'eau dans l'huile, que va-t-il se passer ?

Une seule goutte va-t-elle se former ? Plusieurs ? Aucune ?

Pour analyser ces phénomènes de coexistence et de séparation de deux liquides, des modèles mathématiques essaient de décrire comment le hasard, qui est présent au niveau atomique, peut induire des effets géométriques, déterministes à notre échelle.

Lorsque la température est basse, les particules de même type ont une tendance très forte à se regrouper, tandis qu'à haute température, le hasard tend à faire se mélanger les deux types de molécules de manière homogène.

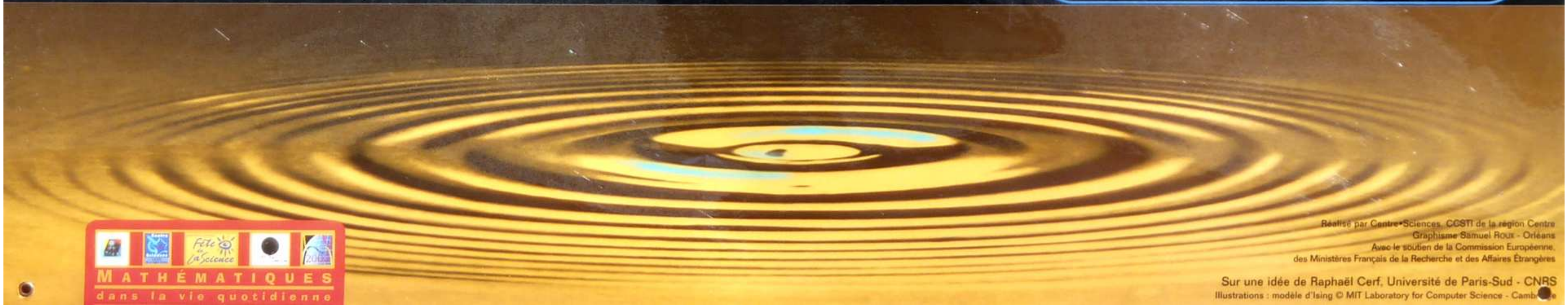
Un modèle probabiliste

Un modèle simple, le modèle d'Ising, décrit ces phénomènes de transition de phases.

Partant d'une description microscopique du système, il permet d'expliquer, à l'échelle macroscopique, les régimes de solubilité et de saturation et de vérifier la prédiction de formation d'une goutte unique avec une forme sphérique.

Il décrit l'interaction entre particules voisines et comporte un paramètre, la température, qui contrôle le hasard.

Une valeur critique de la température sépare le régime où l'on observe un mélange homogène du régime où l'on observe deux phases distinctes.



MATHÉMATIQUES dans la vie quotidienne

Réalisé par Centre•Sciences, CCSTI de la région Centre
Graphisme Samuel Roux - Orléans
Avec le soutien de la Commission Européenne,
des Ministères Français de la Recherche et des Affaires Étrangères

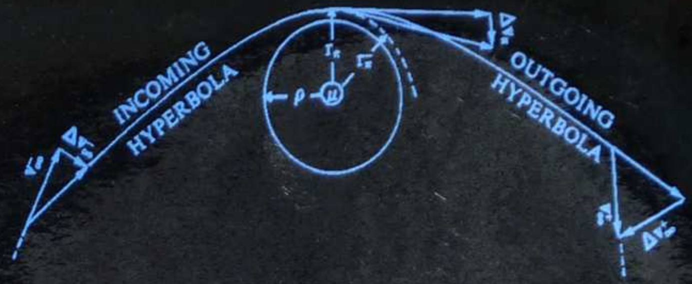
Sur une idée de Raphaël Cerf, Université de Paris-Sud - CNRS
Illustrations : modèle d'Ising © MIT Laboratory for Computer Science - Cambridge

Des satellites aux portables !

Télécommunications, navigation, météorologie…, téléphones cellulaires, GPS, Internet…, autant de raisons d'envoyer des satellites autour de la Terre.

Les projets, de plus en plus nombreux, nécessitent l'envoi d'engins spatiaux au moindre coût.

Pour cela, les mathématiciens sélectionnent et optimisent les trajectoires et les orbites des engins, affinent les économies d'énergie… Ils utilisent des outils développés depuis longtemps, méthode de Lagrange (1755), de Gauss (1801)…, mais aussi des résultats récents qui tiennent compte de la théorie de la relativité.



Une assistance gravitationnelle

Pour trouver la meilleure trajectoire du véhicule spatial et exploiter au mieux l'attraction d'un corps céleste, il faut que la vitesse du véhicule varie le moins possible en passant près du corps, nécessitant le minimum de manœuvre et d'énergie supplémentaires.

Pour cela on peut agir sur trois paramètres :
la vitesse d'approche, la vitesse de sortie et la distance de survol.

Réalisé par Centre•Sciences, CCSTI de la région Centre
Graphisme Samuel Roux - Orléans
Avec le soutien de la Commission Européenne,
des Ministères Français de la Recherche et des Affaires Étrangères

Sur une idée de Miguel Belló Mora, Head of Engineering and Mission Analysis, GMV S.A. Madrid

Des images débruitées !

Les images numériques présentent toujours des imperfections, appelées bruit, qui sont dues aux capteurs.

Avant de pouvoir exploiter ces images, une des premières étapes de la vision par ordinateur est de les débruiter, c'est-à-dire d'obtenir une image aussi régulière que possible à partir de l'image brute.

Cela peut être fait grâce à un algorithme où chaque niveau de gris de l'image est codé sous forme numérique.

Cet algorithme s'étend sans difficulté aux images en couleurs.

Du flou au lissage

Pour réaliser ce débruitage, on utilise des équations aux dérivées partielles. La plus connue est l'équation de la chaleur.

Pour une image noir et blanc, cela revient à considérer que le niveau de gris de chaque point est une moyenne pondérée des niveaux de gris des points voisins.

Cela a comme inconvénient de rendre flous les bords des objets.

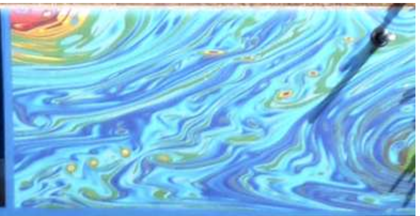
On y remédie en utilisant des lissages qui n'emploient pas tous les points voisins.

MATHÉMATIQUES dans la vie quotidienne

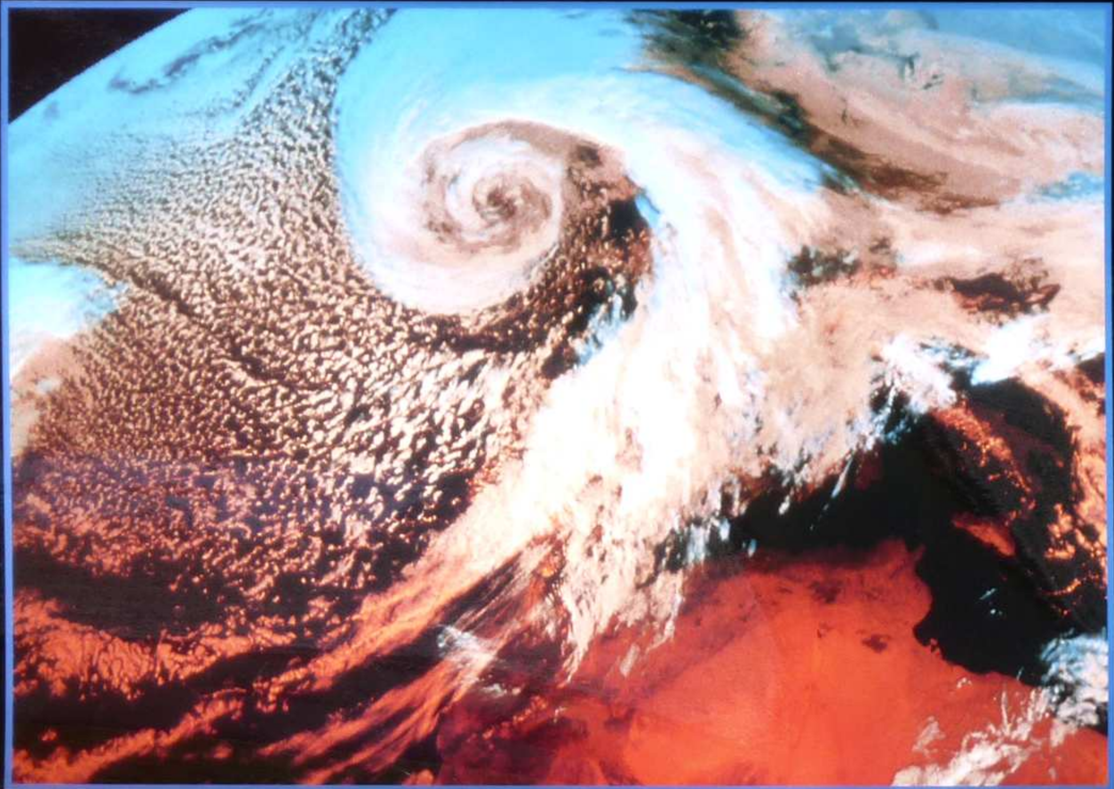
Réalisé par Centre•Sciences, CCSTI de la région Centre
Graphisme Samuel Roux - Orléans
Avec le soutien de la Commission Européenne, des Ministères Français de la Recherche et des Affaires Étrangères

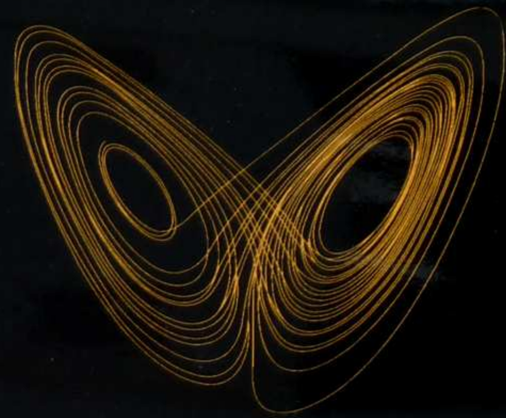
Idée et illustrations de Françoise Dibos et Georges Kœpfler,
Laboratoires Ceremade (Université Paris-Dauphine)
et Prisme (Université Paris-René Descartes)

Une météo turbulente !



Qu'il s'agisse de la naissance et de la trajectoire d'une tempête, de la structure géométrique d'un nuage et de son rôle dans l'absorption des rayonnements solaire et tellurique, de l'assimilation optimale de mesures hétérogènes et dispersées (stations météo, satellites, avions, bateaux...) dans un modèle numérique de prévision du temps... : la modélisation mathématique est omniprésente dans la météorologie moderne ; elle sert à décrire et comprendre les mécanismes, à analyser et à prévoir le temps ou le climat.





Turbulences atmosphériques

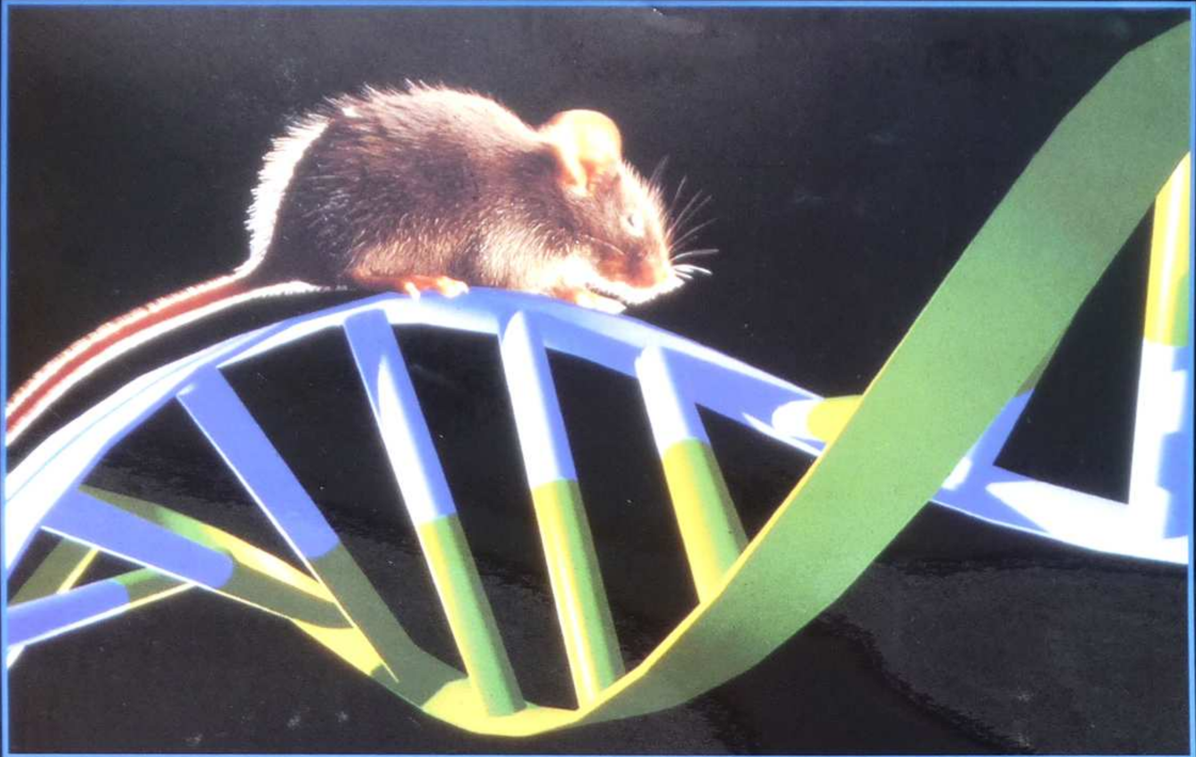
Les écoulements turbulents, et les mouvements de l'atmosphère sont particulièrement turbulents, peuvent être modélisés par les équations de Navier-Stokes qu'on ne sait toujours pas résoudre. Les météorologues font donc appel à la simulation numérique, utilisant les ordinateurs les plus puissants et les schémas numériques les plus sophistiqués. Ils utilisent aussi la théorie mathématique des systèmes dynamiques.
C'est un météorologue, E.N. Lorenz, qui a mis en évidence en 1963 le caractère chaotique des trajectoires d'un système dynamique simple et sa sensibilité aux conditions initiales, évoquant l'effet dans le futur des battements d'aile d'un papillon sur l'écoulement atmosphérique.

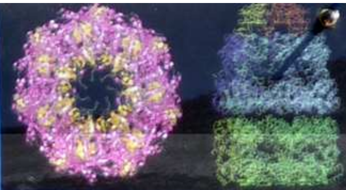
MATHÉMATIQUES dans la vie quotidienne

Réalisé par Centre•Sciences, CCSTI de la région Centre
Graphisme Samuel Roux - Orléans
Avec le soutien de la Commission Européenne, des Ministères Français de la Recherche et des Affaires Étrangères

Sur une idée de Philippe Courtier (Météo-France) et Claude Basdevant (ENS-Ecole Polytechnique- Paris)
Illustrations : Météo-France - B. Legras, LMD/ENS/CNRS - IPSL/CNRS

Au bout du génome !





Depuis une vingtaine d'années, l'apparition de techniques nouvelles (séquençage de l'ADN, puces à ADN...) ouvre des perspectives révolutionnaires en biologie. Ces techniques génèrent une masse considérable de données très variées (séquences, images, textes, résultats d'expériences, bibliographies...).

Les mathématiques sont au centre de leur traitement et permettent d'en extraire des informations pertinentes.

Les domaines les plus sollicités sont l'algorithmique (il faut des procédures efficaces pour trouver les événements dans la masse de données) et la théorie des probabilités et la statistique (la prise de décision repose sur des modèles aléatoires).

Structure des protéines

Les protéines sont des longues chaînes d'acides aminés qui sont repliées dans l'espace.

L'activité d'une protéine s'explique essentiellement par sa forme après repliement. Pour de multiples applications (pharmacologie, agriculture...), on doit connaître cette forme.

La méthode la plus sûre actuellement est d'utiliser les méthodes de la cristallographie, mais cela est très long.

Ceci explique que l'on fait appel, massivement, à des méthodes mathématiques et informatiques pour "calculer" cette forme.

MATHÉMATIQUES dans la vie quotidienne

Réalisé par Centre•Sciences, CCSTI de la région Centre
Graphisme Samuel Roux - Orléans
Avec le soutien de la Commission Européenne,
des Ministères Français de la Recherche et des Affaires Étrangères

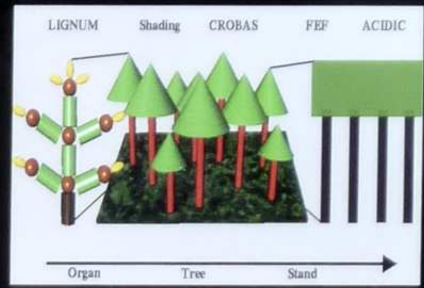
Idée et illustrations de François Rodolphe, Jean-François Gibrat et Pierre Nicolas
unité INRA- Versailles "Mathématique, Informatique & Géno"

De l'arbre à la forêt !

Étudier les effets du climat sur les arbres et les forêts demande des modèles de leur évolution tenant compte d'autant de facteurs que possible, tout en étant assez simples pour pouvoir être étudiés. Cela exige une étroite collaboration entre mathématiciens et experts des forêts.

Les principales difficultés :

- plusieurs systèmes hiérarchisés sont en jeu (forêt, arbre, feuille, molécule...)
- différentes échelles de temps coexistent (centaines d'années pour la durée de vie, quelques secondes pour le métabolisme...).



La lutte pour la lumière

D'énormes progrès ont eu lieu ces dernières années. Un modèle dynamique, basé sur les processus vitaux et l'environnement local des arbres, a été appliqué avec succès à l'analyse des effets climatiques et sert aussi à la gestion des forêts et à l'amélioration de la qualité du bois.
De nouveaux modèles prennent en compte la croissance des arbres au cours de l'année et permettent notamment de prévoir la compétition des espèces dans la lutte pour la lumière.

MATHÉMATIQUES dans la vie quotidienne

Réalisé par Centre•Sciences, CCSTI de la région Centre
Graphisme Samuel Roux - Orléans
Avec le soutien de la Commission Européenne, des Ministères Français de la Recherche et des Affaires Étrangères

Idée et illustrations de Marjo Lipponen. Programme MaDaMe - Université de Turku (Finlande) et Photothèque INRA